

Primo compitino argomenti

Problema della Pintel

Cerca di trarre il massimo profitto dalla produzione di due linee di microprocessori, i Pintium e i Colorun.

Con i wafer ci crei i microprocessori, e noi possiamo fabbricare 3000 wafer al mese.

$$w_p + w_c = 3000$$

Ora, se io moltiplico i soldi prodotti per la quantità prodotta da ogni linea di microprocessori ottengo

$$\max 500x_p + 200x_c$$

ora possiamo trasformare il vincolo precedente con x_p e x_c , considerando la percentuali di processori difettosi. Semplificando quindi diventa:

$$2x_p + x_c \leq 900000$$

Problema di equipartizione

Dividiamo n elementi in 2 gruppi cercando di spartirli il più equamente possibile. E' un problema di decisione.

$$N = a_1, a_2, \dots, a_n$$

$$(P) \quad \min\{c(S) = |\sum_{a_i \in S} a_i - \sum_{a_i \in N/S} a_i| : S \subseteq N\}$$

Problema di decisione

Si tratta di capire se esiste o meno qualcosa.

$$(P_k) \quad \exists x \in F : c(x) \leq k \rightarrow \text{basta una soluzione a caso}$$

Gap

Il gap è la distanza tra il valore restituito da un algoritmo euristico dal valore ottimo.

$$\text{GAP (problemi di minimo)} = c(\bar{x}) - z(P) \geq 0$$

Gap relativo

E' il gap con più resistenza ai cambi di ordine di grandezza

$$\text{GAP relativo (problemi di minimo)} = \frac{c(\bar{x}) - z(P)}{|z(P)|} \geq 0$$

Rilassamento

Metodo per trovare (x problemi di minimo) un limite inferiore al valore ottimo che non conosciamo. Troviamo infatti un valore sotto il quale il valore ottimo non può scendere.

$$(P) \quad \min\{c(x) : x \in F\}$$

$$(\underline{P}) \quad \min\{\underline{c}(x) : x \in \underline{F}\} \rightarrow \text{Problema con rilassamento}$$

$$\text{E quindi } \underline{z}(\underline{P}) \leq z(P)$$

$$\text{Con } F \subseteq \underline{F} \text{ e } \underline{c}(x) \leq c(x)$$

Problema della fonderia

Il Problema della fonderia è un'istanza di un problema di ottimizzazione in cui dobbiamo comprare dei materiali primi per produrre 1000 pezzi di ferro considerando che il silicio e il manganese devono avere una percentuale minima e massima nel nostro pezzo prodotto e abbiamo a disposizione diversi fornitori. Il nostro obiettivo quindi è cercare di spendere il meno possibile.

Creiamo le variabili x_a, x_b, x_c, x_m per le varie proposte dei fornitori, e successivamente le moltiplichiamo per il costo di ogni costo di offerta al kg

$$c(x) = 0,025 * x_a + 0,030 * x_b + 0.018 * x_c + 10 * x_m$$

A questo punto creiamo i vincoli di non negatività delle variabili, e trasformiamo i vincoli del silicio e manganese in scala di 1000 pezzi di ferro, e aggiungiamo i vincoli alla funzione obiettivo.

$$32,5 \leq 0,025 * x_a + 0,030 * x_b + 0.018 * x_c + 10 * x_m \leq 55 \rightarrow \text{calcolo silicio}$$

$$4,5 \leq 0,025 * x_a + 0,030 * x_b + 0.018 * x_c + 10 * x_m \rightarrow \text{calcolo manganese}$$

Problema dello zaino

E' un problema di ottimizzazione in cui abbiamo un ladro che vuole massimizzare il bottino tenendo presente che lo zaino ha una capacità limitata e che oggi oggetto pesa e vale diversamente. Possiamo scriverlo sia in PL sia in PLI.

PL

$$(P) \quad \max\{\sum_{i \in S} c_i : \sum_{i \in S} a_i \leq b\} \quad S \subseteq \{1, \dots, n\}$$

PLI

$X_i = 1$ se prendo l'oggetto i , $= 0$ se non lo prendo.

$$(PI) \quad \max\{\sum_{i=1, \dots, n} c_i x_i : \sum_{i=1, \dots, n} a_i x_i \leq b\}$$

MST - problema albero di copertura costo minimo

Abbiamo un grafo $G=\{V,E\}$ e dobbiamo ricavarne un albero da cui è possibile effettuare qualsiasi cammino tra nodi cercando di minimizzare i costi degli archi.

Effettuando un taglio quindi nel grafo, almeno un arco da un lato e un altro lo dobbiamo scegliere per poter effettuare il cammino.

Creiamo una variabile intera x_{ij} tale che se è 1 allora abbiamo scelto l'arco $\{i, j\} \in E$ nel nostro albero, 0 altrimenti.

$$(MST) \quad \min\{\sum_{\{i,j \in E\}} c_{ij} x_{ij}\} \text{ dove } c_{ij} \text{ è il costo del corrispondente arco.}$$

Problema dell'assegnamento

Abbiamo un grafo bipartito completo di n nodi in cui i nodi non sono connessi nello stesso insieme ma solo con l'altro. Ogni arco ha un costo e noi vogliamo creare un sottografo con esattamente un arco uscente da ogni nodo minimizzando i costi e non lasciando nodi esclusi.

Utilizziamo una variabile binaria x_{ij} che vale 1 se prendo l'arco $\{i,j\}$ per la creazione del nuovo grafo

Ora possiamo creare la funzione obiettivo e i vincoli:

$$\min \sum_{j=1, \dots, n} c_{ij} x_{ij}$$

e i vincoli:

$$\sum_{i=1, \dots, n} x_{ij} = 1 \rightarrow \text{un solo arco connesso al nodo } i\text{-esimo}$$

$$\sum_{j=1, \dots, n} x_{ij} = 1 \rightarrow \text{un solo arco connesso al nodo } j\text{-esimo}$$

Il problema del commesso viaggiatore

Abbiamo un grafo completo e vogliamo trovare un ciclo hamiltoniano in modo tale da minimizzare il costo.

ciclo hamiltoniano = un cammino che parte da un nodo w , esplora tutti gli altri nodi e poi torna da w .

Primo metodo: grafo bipartito

Possiamo immaginare il grafo come bipartito in cui segno i costi sugli archi, e cerco di trovare una soluzione per il problema di assegnamento. Il problema è che è facile trovare una soluzione non ammissibile, perché potrebbero capitare delle soluzioni che non sono cicli hamiltoniani. Così scritto il problema è Np-hard.

Secondo metodo: MST

Possiamo partire dal problema dell'MST e aggiungere i vincoli del nostro problema. Questa risoluzione è polinomiale e viene chiamata TSP.

Problema di assegnamento di frequenza

Abbiamo una città con diverse antenne e dobbiamo cercare di comprare meno frequenze possibili considerando però che antenne troppo vicine non possono avere la stessa frequenza sennò si sovrappongono.

Possiamo immaginarlo come un grafo bipartito in cui in un insieme ci sono le frequenze e in un altro le antenne, e che i nodi di antenna adiacenti sono le antenne che non possono avere la stessa frequenza.

Creiamo la variabile binaria x_{hi} , $h = 1, \dots, k$, $i = 1, \dots, n$, $x_{hi} \in \{0, 1\}$ che vale 1 se assegno la frequenza h all'antenna i .

Creiamo ora un vincolo di semi assegnamento:

$\sum_{h=1, \dots, k} x_{hi} = 1 \rightarrow$ ogni antenna deve avere una frequenza assegnata ma non viceversa

$x_{hi} + x_{hj} \leq 1 \rightarrow$ antenne vicine non possono avere la stessa frequenza

Con queste variabili però, non riusciamo a creare una funzione di ottimizzazione lineare, perciò ne creiamo una nuova:

$y_h \in \{0, 1\}$ è 1 quando ho usato la frequenza h .

A questo punto il nostro problema di ottimizzazione diventa $\min \sum_{h=1, \dots, k} y_h$

Ci manca solo di spiegare y_h come vincolo lineare: $x_{hi} \leq y_h$

Variante problema dell'assegnamento di frequenze

Le frequenze vengono comprate a gruppi. Usiamo la variabile x_i che ci dice se abbiamo comprato quel gruppetto o meno.

Abbiamo un insieme principale di tutte le frequenze $F = \{f_1, \dots, f_k\}$

e i gruppetti vengono messi in questo sottoinsieme di gruppi $S \subseteq F$ in cui $S = \{S_1, S_2, \dots, S_k\}$

e poi abbiamo i mazzetti

$S_1 = \{f_1, f_3\}, S_2 = \{f_1, f_4\}, S_3 = \{f_2, f_3, f_4\}$

funzione obiettivo: $\min \sum_{i=1, \dots, n} c_i x_i$

i vincoli sono che nei mazzetti devono essere presenti almeno una volta tutte le frequenze in vendita (problema di set covering)

$$\sum_{i=f_h \in S_i} x_i \geq 1$$

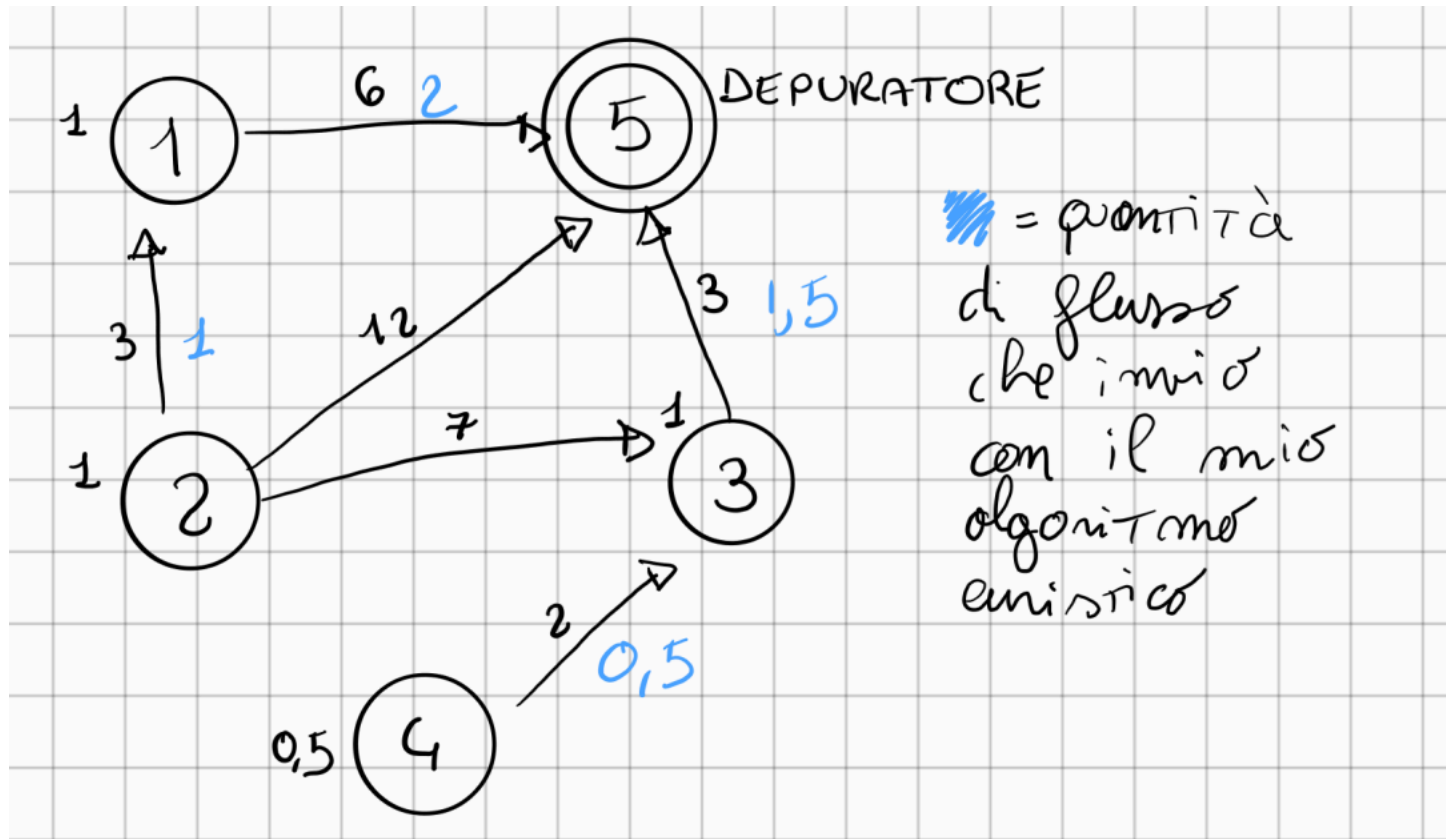
Se invece dovevano essere presenti solo una volta esatta nel mazzetto allora si sarebbe trattato del problema di partizione

$$\sum_{i=f_h \in S_i} x_i = 1$$

Problema delle tartarughe ninja

E' un istanza dei problemi di flusso di costo minimo (MCF).

Parla di creare un impianto fognario in cui abbiamo un grafo orientato con dei nodi pozzi e dei nodi depuratori, dove ogni arco ha il costo della realizzazione del tubo per unità di flusso. Questo significa che Dobbiamo trovare per ogni arco la quantità di flusso da passare considerando che bisogna spendere il meno possibile e che tutto il flusso generato deve essere depurato.



Creiamo quindi la nostra variabile di flusso $x_{i,j}$ che indica la dimensione della tubatura da i a j .

Creiamo ora la funzione obiettivo e i vincoli.

$$(P) \quad \min 6x_{1,5} + 3x_{2,1} + 7x_{2,3} + 12x_{2,5} + x_{3,5} + 2x_{4,3}$$

I vincoli si creano secondo la legge di conservazione del flusso:

$$\text{nodo 1: } x_{1,5} - x_{2,1} = 1$$

$$\text{nodo 2: } x_{2,1} + x_{2,5} + x_{2,3} = 1$$

$$\text{nodo 3: } x_{3,5} - x_{2,3} - x_{4,3} = 1$$

$$\text{nodo 4: } x_{4,3} = 0,5$$

Aggiungo ora i vincoli di non negatività:

$$x_{1,5}, x_{2,1}, x_{2,3}, x_{3,5}, x_{4,3} \geq 0$$

Il modello sarebbe completo, ma possiamo aggiungere in maniera ridondante anche il vincolo sul nodo sorgente:

sorgente:

$$x_{1,5} + x_{2,5} + x_{3,5} = 3,5$$

Problemi di flusso di costo minimo (MCF)

E' la generalizzazione del problema delle tartarughe ninja.

Abbiamo un grafo $G=(N,A)$,

un vettore dei costi descritto così:

$$c : A \rightarrow \mathbb{R}$$

$$c = [c_{i,j}]_{(i,j) \in A}$$

Un vettore che rappresenta il flusso generato dai singoli nodi:

$$b : N \rightarrow \mathbb{R}$$

$$b = [b_i]_{i \in N}$$

Un vettore che rappresenta la capacità massima di flusso che ogni arco può avere:

$$u : A \rightarrow \mathbb{R}_+$$

$$u = [u_{i,j}]_{(i,j) \in A}$$

Funzione obiettivo e vincoli

$$(MST) \quad \min \sum_{(i,j) \in A} c_{ij} x_{ij}$$

$$\sum_{(j,i) \in BS(i)} - \sum_{(i,j) \in FS(i)} x_{ij} = b_i \rightarrow \text{generalizzazione dei vincoli sui nodi del problema delle tartarughe}$$

$$\sum b_i = 0 \rightarrow \text{tutto il flusso generato dai nodi deve confluire al sorgente.}$$

Problema del cammino minimo (SP)

Abbiamo un grafo orientato con dei costi sugli archi, e dobbiamo trovare il cammino di costo minimo da nodo s a nodo t.

Per risolverlo basta scriverlo in forma (MCF)

$$b_i = \{-1 \text{ se } i=s, 1 \text{ se } i=t \text{ e } 0 \text{ altrimenti}\}$$

$$u_{ij} < +\infty \text{ le capacità sugli archi non ci servono perché passa solo un'unità di flusso}$$

Aggiungiamo inoltre che il flusso non può scomporsi

$$x_{ij} \in \{0, 1\}$$

Cammini minimi vincolati

Variante dell'SP in cui aggiungiamo un vettore di lunghezze degli archi e una lunghezza massima del cammino. Bisogna trovare il cammino meno costoso e meno lungo.

Il problema è uguale all'SP ma aggiunge questo vincolo:

$$\sum_{(ij) \in A} l_{ij} x_{ij} \leq L \rightarrow \text{è come la formula dello zaino}$$

Milan Net

Milan net vuole inserire negli uffici dei chatbot, in due modi diversi: il primo, ha un costo di 20% in più a fronte di un incremento del 40% e la seconda ha un costo del 50% in più e un incremento del 100%.

Dichiariamo $y_i \in \{0, 1\}$ per rappresentare la scelta degli uffici da aprire e $y_i^h \in \{0, 1\}$ e $h \in \{1, 2\}$ per rappresentare la scelta della configurazione chatbot da inserire.

A questo punto abbiamo due modi di vedere y_i^h : o lo vediamo come se l'ufficio è aperto allora la configurazione chatbot può essere la prima o la seconda, o lo vediamo come se l'ufficio è aperto senza chatbot, o l'ufficio è aperto con la prima scelta di chatbot, altrimenti con la seconda scelta.

Nel testo si usa la seconda opzione, creando questa funzione obiettivo e questi vincoli:

$$\text{f.o. parziale: } \sum_{i \in I} f_i(y_i + 1.2y_i^1 + 1.5y_i^2)$$

vincoli:

$$\sum_{j \in J} d_j x_{ij} \leq u_i(y_i + 1.4y_i^1 + 2.0y_i^2)$$

$$y_i + y_i^1 + y_i^2 \leq 1$$

Ricordiamoci anche che tra le scelte dei vincoli c'era un vincolo con una frazione tra le variabili, che è illegale nella programmazione lineare.